Adı Soyadı:
Numarası:

31.03.2021

MAT 310 CEBİR II QUİZ SORULARI

1) $\overline{0}, \overline{1} \in \mathbb{Z}_2$ olmak üzere $M = \{(\overline{0},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1}),(\overline{1},\overline{0}),(\overline{1},\overline{1})\}$ kümesi üzerinde toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanıyor.

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)\,(c,d)=(ad+bc+bd,ad+bc+ac)$$

a) (25p) M bir halka olur mu? Araştırınız. (İşlemlerin iyi tanımlı olduğu gösterilmeye çektir.)

b) (25p) M bir cisim olur mu? Araştırınız.

2) a) (25p) R birimli ve sıfır bölensiz bir halka olsun. $a \in R$ nilpotent ise $1-a$ birimseldir, gösteriniz.

b) (25p) R bir halka olsun. Her $a,b \in R$ için $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ ise R değişmelidir, gösteriniz.

BAŞARILAR
Prof. Dr. Şenol EREN

Cevap Anahtarı

1)a) $M \neq \emptyset$: M'nin tanımından açıktır. İyi tanımlılık sonda verilmiş

M bir cebirsel yapıdır.

M1) $(M,+)$ abel grup olur mu?

(*) $\forall (a,b),(c,d) \in M$ için

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)=(c+a,d+b)=(c,d)+(a,b)$

olup $(M,+)$ değişmelidir.

(*) $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in M$ için $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{Z}_2$ olup $\mathbb{Z}_2$ de "+" birleşme

$((a,b)+(c,d))+(e,f)=(a+c,b+d)+(e,f)$
$=((a+c)+e,(b+d)+f)$
$=(a+(c+e),b+(d+f))$
$=(a,b)+(c+e,d+f)$
$=(a,b)+((c,d)+(e,f))$

olup $(M,+)$ birleşmelidir.

$\circledast$ $\forall (a,b) \in M$ için

$$(a,b)+(e_1,e_2)=(a,b) \Rightarrow (a+e_1, b+e_2)=(a,b)$$
$$\Rightarrow (e_1,e_2)=(\bar{0},\bar{0}) \in M \text{ bulunur}$$

$(M,+)$ birim elemanı vardır ve $(\bar{0},\bar{0})$ dır

$\circledast$ $\forall (a,b) \in M$ için "+" ya göre

$(\bar{0},\bar{0})$'ın tersi $(\bar{0},\bar{0})$

$(\bar{0},\bar{1})$'in tersi $(\bar{0},\bar{1})$

$(\bar{1},\bar{0})$'ın tersi $(\bar{1},\bar{0})$

$(\bar{1},\bar{1})$'in tersi $(\bar{1},\bar{1})$ dır. Yani her elemanın tersi vardır ve "+" ya göre kendisine eşittir

$(M,+)$ bir abel gruptur.

M2) $(M,\cdot)$ birleşmeli olur mu?

M'nin içinde dört eleman olup elemanlardan biri $(\bar{0},\bar{0})$ alınırsa $(\bar{0},\bar{0})$ için birleşme öz. sağlanacağı açıktır. Çünkü "$\cdot$" işleminin tanımına göre elemanlardan biri $(\bar{0},\bar{0})$ old. sonucu direkt $(\bar{0},\bar{0})$ olur.

Diğer üç eleman için bakalım.

$$\begin{aligned}(\bar{0},\bar{1})\left((\bar{1},\bar{0})\cdot(\bar{1},\bar{1})\right) &= (\bar{0},\bar{1})(\bar{1}+\bar{0}+\bar{0}, \bar{1}+\bar{0}+\bar{1}) \\ &= (\bar{0},\bar{1})(\bar{1},\bar{0}) \\ &= (\bar{0}+\bar{1}+\bar{0}, \bar{0}+\bar{1}+\bar{0}) \\ &= (\bar{1},\bar{1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left((\bar{0},\bar{1})\cdot(\bar{1},\bar{0})\right)\cdot(\bar{1},\bar{1}) &= (\bar{1},\bar{1})\cdot(\bar{1},\bar{1}) \\ &= (\bar{1}+\bar{1}+\bar{1}, \bar{1}+\bar{1}+\bar{1}) \\ &= (\bar{1},\bar{1})\end{aligned}$$

eşitlik görülür

M2 sağlanır $(M,\cdot)$ değişmeli

$(a,b,c,d \in \mathbb{Z}/2$ olup $\mathbb{Z}/2$ de "+" ve "$\cdot$" değişmeli ve birleşmeli$)$

M3) $(M,\cdot)$ değişmelidir. Çünkü

$$\begin{aligned}(a,b)(c,d) &= (ad+bc+bd, ad+bc+ac) \\ &= (cb+da+db, cb+da+ca) \\ &= (c,d)(a,b)\end{aligned}$$

olur. O halden tek yönden göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned}(a,b)\left((c,d)+(e,f)\right) &= (a,b)(c+e, d+f) \\ &= (a(d+f)+b(c+e)+b(d+f), a(d+f)+b(c+e)+a(c+e)) \\ &= (ad+bc+bd, ad+bc+ac) + (af+be+bf, af+be+ae) \\ &= (a,b)(c,d) + (a,b)(e,f)\end{aligned}$$

olup $(M,+,\cdot)$ bir halkadır

b) M'nin cisim olması için öncelikle birimli ve değişmeli olmalıdır. M'nin değişmeli olduğunu a) şıkkında gösterdik.
M birimli olur mu? Yani

$\forall (a,b)\in M$ için

$(a,b)(e_1,e_2)=(a,b)$ o.ş $(e_1,e_2)\in M$ var mıdır?

$\Rightarrow (ae_2+be_1+be_2,\ ae_2+be_1+ae_1)=(a,b)$ $\boxed{(a,b)\in \mathbb{Z}_2 \text{ ve } (e_1,e_2)\in\mathbb{Z}_2}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\overset{1}{e_2}+b\overbrace{(e_1+e_2)}^{0}=a \\ a\underbrace{(e_2+e_1)}_{0}+b\underbrace{e_1}_{1}=b \end{array}\right\} \Rightarrow (e_1,e_2)=(\bar{1},\bar{1})$$

M birimlidir. M'nin birimi $(\bar{1},\bar{1})$ dir. Şimdi de

M'nin $(\bar{0},\bar{0})$ dışındaki her elemanı terslenebilir mi? araştıralım. Yani

$(\bar{0},\bar{1}).(a,b)=(\bar{1},\bar{1})$ o.ş $(a,b)\in M$

$(\bar{1},\bar{0}).(c,d)=(\bar{1},\bar{1})$ o.ş $(c,d)\in M$

$(\bar{1},\bar{1}).(e,f)=(\bar{1},\bar{1})$ o.ş $(e,f)\in M$ bulmalıyız

İlk eşitlikten $(\bar{0}+\bar{a}+\bar{b},\ \bar{0}+\bar{a}+\bar{0})=(\bar{1},\bar{1}) \Rightarrow (a,b)=(\bar{1},\bar{0})$

İkinci eşitlikten $(\bar{d}+\bar{0}+\bar{0},\ \bar{d}+\bar{0}+\bar{c})=(\bar{1},\bar{1}) \Rightarrow (c,d)=(\bar{0},\bar{1})$

Üçüncü eşitlikten $(\bar{f}+\bar{e}+\bar{f},\ \bar{f}+\bar{e}+\bar{e})=(\bar{1},\bar{1}) \Rightarrow (\bar{e},\bar{f})=(\bar{1},\bar{1})$

O halde M cisimdir.

2) a) R birimli ve sıfır bölensiz bir halka olsun. $1_R\in R$ R'nin birimi olsun. a, nilpotent eleman ise $a^n=0$ o.ş $n\in\mathbb{Z}^+$ vardır $(1-a)$'nın birimsel yani terslenebilir olduğunu gösterelim.

$1-a^n=(1-a)(1+a+a^2+\dots+a^{n-1})$ olduğunu biliyoruz.

$a^n=0 \Rightarrow 1=(1-a)(1+a+a^2+\dots+a^{n-1})$

$\Rightarrow (1-a)$ terslenebilirdir ve tersi de $(1+a+a^2+\dots+a^{n-1})$ dir

b) $a^2-b^2=(a-b)(a+b) \Rightarrow a^2-b^2=a^2+ab-ba-b^2$

$\xRightarrow[+b^2]{-a^2} -a^2+a^2-b^2+b^2=-a^2+a^2+ab-ba-b^2+b^2$

$\Rightarrow 0_R=ab-ba$

$\Rightarrow ab=ba$

Yani R değişmelidir

R halka old. "." nın "+" üzerine dağılma öz. kullandık.
$\forall a\in R$'nin toplamsal tersi vardır
O halde $a^2, b^2\in R$'nin de tersleri vardır